798. Teilerkettensatz ト Vielfachenkettensatz

浅野 啓三 (阪大)

Nichtnullteiler ヲ有スル kommutativer Ring ニ於テハ Teilerkettensatz ガ eingeschränkter Vielfachenkettensatz カラ出ルコトハ森, 秋月両氏ノ研究ニヨッテ知ラレテヰルノデアルガ, 此ノ事實ガ nichtkommutativ ノ場合ニモ成立スルデアラウカ? 即チ Nichtnullteiler ヲ有スル Schiefring ニ於テ Linksideal ニ關スル Teilerkettensatz ガ Linksideal ニ關スル eingeschränkter Vielfachenkettensatz カラ出ルデアラウカ? 一般ノ場合ニ此ノ事實ヲ決定スルコトハ筆者ニハ成功シナカッタノデアルガ, Linksideal ニ關スル Teilerkettensatz ガ Linksideal ニ關スル Vielfachenkettensatz カラ

出ルコトヲ認メ得タノデ，以下コレニツイテ述ベテ見タイ。

定理：$\mathfrak{o}$ヲ Linksideal ニ関スル Vielfachenkettensatz（Minimalbedingung）ノ成立スル Schiefring トスル．$\mathfrak{o}$ガ少クトモ一ツ Nichtnullteiler ヲ含メバ $\mathfrak{o}$ハ単位元ヲ有スル。

証明：aヲ$\mathfrak{o}$ノ Nichtnullteiler トスル．
$\mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}a \geqq \mathfrak{o}a^2 \geqq \cdots\cdots$ ハ Linksideal ニ関スル Vielfachenkette デアルカラ $\mathfrak{o}a^n = \mathfrak{o}a^{n+1}$ トナル n ガ存在スル．ヨッテ任意ノ元 x ニ對シテ $xa^n = ya^{n+1}$ トナル元 y ガ存在スル．a ガ Nullteiler デナイカラ，上式ヨリ $x = ya$．今 eヲ $a = ea$ トナル元トスレバ $e \neq 0$．且ツ

$$(x - xe)a = xa - xea = xa - xa = 0$$

a ガ Nullteiler デナイカラ $x - xe = 0$，$x = xe$．
従ッテ

$$a(x - ex) = ax - aex = ax - ax = 0$$

故ニ　$x - ex = 0$，　$x = ex$

ヨッテ e ガ単位元デアル。

定理：$\mathfrak{o}$ヲ少クトモ一ツ Nichtnullteiler ヲ含ム Schiefring トスル．$\mathfrak{o}$ニ於テ Linksideal ニ関スル Vielfachenkettensatz ガ成立スルナラバ，Linksideal ニ関スル Teilerkettensatz ガ成立スル。

補助定理: $\mathfrak{o}$ ヲ halbeinfacher Ring, $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{o}$-Linksmodul トシ, $\mathfrak{o}$ ノ単位元ハ $\mathfrak{M}$ ノ Einheitsoperator ニナルモノトスル。$\mathfrak{M}$ ノ Untermodul ニ関シテ Minimalbedingung ガ成立スルナラバ, $\mathfrak{M}$ ハ完全可約 (einfache Modul ノ直和) デアル。

(証明) $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}e_t$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ einfache Linksideale ヘノ直和分解トスル。然ラバ $\mathfrak{M}$ ハアラユル $\mathfrak{o}e_i u\ (u \in \mathfrak{M})$ ノ Summe デアリ, $\mathfrak{o}e_i u$ ハ 0 カ又ハ einfacher Teilmodul デアル
今 $\mathfrak{o}u_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}u_n$ ガ einfache Teilmoduln ノ直和デアルトスル。若シ einfacher Teilmodul $\mathfrak{o}u_{n+1}$ ガソノ中ニ含マレテキナイナラバ Summe $\mathfrak{o}u_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}u_n + \mathfrak{o}u_{n+1}$ ハ直和デアル。ヨッテ

$$\mathfrak{o}u_1 < \mathfrak{o}u_1 + \mathfrak{o}u_2 < \mathfrak{o}u_1 + \mathfrak{o}u_2 + \mathfrak{o}u_3 < \cdots\cdots,$$

ナル Kette ガ得ラレ, ソレハ有限デ終ラナケレバナラナイ。然ラザレバ $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{o}u_i + \mathfrak{o}u_{i+1} + \cdots\cdots$ トスルトキ

$$\mathfrak{M}_1 > \mathfrak{M}_2 > \mathfrak{M}_3 > \cdots\cdots$$

ハ Teilmoduln ノ Vielfachenkette ヲ作ルコトニナル. ヨッテ $\mathfrak{M}$ ハ einfache Teilmoduln ノ直和デアル。

(定理ノ証明) 前定理ニヨリ $\mathfrak{o}$ ハ単位元ヲ有スル。又 $\mathfrak{u}$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ maximals zweiseitiges Nilideal(*)

(*) 次頁ヘ

トスレバ $\mathfrak{u}$ ハ nilpotent デアリ, $\mathfrak{o}/\mathfrak{u}$ ハ halbeinfach デアル。(**)

$$\mathfrak{o} \supset \mathfrak{u} \supset \mathfrak{u}^2 \supset \cdots\cdots \supset \mathfrak{u}^\rho = 0$$

ハ $\mathfrak{o}$-Linksmodul ノ Kette ヲ作リ, Restklassenmodul $\mathfrak{u}^i/\mathfrak{u}^{i+1}$ ハ $\mathfrak{o}/\mathfrak{u}$-Linksmodul ト考ヘラレルカラ, 補助定理ニヨリ完全可約, 従ッテ $\mathfrak{o}$-Linksmodul トシテ組成列ヲ有ス、ヨッテ $\mathfrak{o}$ ハ $\mathfrak{o}$-Linksmodul トシテ組成列ヲ有スル。即チ $\mathfrak{o}$ ニ於テ Linksideal ニ関シ Doppelkettensatz ガ成立スル。

Q.E.D.

最後ニ単位元ヲ有スル Schiefring ニ於テ左 Ideal ニ関スル Kettensatz ト右 Ideal ニ関スル Kettensatz トハ独立デアルコトヲ注意シタイ。

今 K ヲ可換体(***)トシ, $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, \cdots\cdots$ ヲ abzählbar ノ互ニ独立ナ Unbestimmte トスル。K ニ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ ヲ添加シタ Körper ヲ $\mathfrak{k} = K(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots)$ トスレバ $\mathfrak{k}' = K(x_2, x_4, \cdots\cdots, x_{2n}, \cdots\cdots)$ ハ $\mathfrak{k}$ ト isomorph ナ $\mathfrak{k}$ ノ Teilkörper デアル。今 $\mathfrak{k}$ ノ上ノ Rang 2 ノ

(*) 凡テノ zweiseitige Nilideale ノ Vereinigungsmenge.
Nilideal トハ各元ガ nilpotent ニナルヤウナ Ideal.

(**) C. Hopkins, Duke math. J. 4. S. 664–667.

(***) Schiefkörper デモ差支ヘナイ。

$\bar{k}$ - Linksmodul $\gamma = \bar{k} + \bar{k}u$ ヲ作リ，更ニ

$$(\beta u)\alpha = (\beta\alpha')u,\ (\beta u)(\alpha u) = 0 \quad \alpha, \beta \in \bar{k},\ \alpha' \in \bar{k}'$$

ト定義スル．但シ $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ ハ $\bar{k}$ ト $\bar{k}'$ ノ間ノ一ツノ Isomorphismus デアルトスル．尚 distributive law ヲ假定スレバ γ ハ一ツノ Schiefring ニナリ，$\bar{k}u$ ハ Radikal デアル．$\gamma \supset \bar{k}u \supset 0$ ハ γ ノ γ - Linksmodul トシテノ組成列デアルカラ，γ ニ於テハ Linksideal ニ関シ Doppelkettensatz ガ成立スル．一方 $\mathfrak{m}$ ヲ $\bar{k} \supset \mathfrak{m} \supset \bar{k}'$ トナルヌツナ勝手ナ $\bar{k}$ - Rechtsmodul トスレバ $\mathfrak{m}u$ ハ γ ノ右 Ideal ニナル．ヨツテ γ ニ於テハ明カニ右 Ideal ニ関シ Teilerkettensatz モ Vielfachenkettensatz モ成立シナイ。